第 07 讲 极值点偏移：商型

一. 解答题（共 7 小题）

1. 已知函数 $f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}(a>0)$ 有两个相异零点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$\frac{x_1}{x_2}<\frac{e}{a}$.

2. （2021•新疆模拟）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1}{2}x^2$.

（1）当 $a=\frac{5}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）已知 $a\geqslant\frac{4}{3}\sqrt{3}$，$x_1$，$x_2(x_1>x_2)$ 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，求 $y=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-\ln\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值.

3. （2021 春•湖北期末）已知函数 $f(x)=ae^x+\ln x-1(a\in R)$.

（1）当 $a\leqslant e$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性：

（2）若函数 $f(x)$ 恰有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $x_1+x_2\leqslant\frac{(2e+1)\cdot\ln 2e}{2e-1}$，求 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值.

4. （2021•宁德三模）已知函数 $f(x)=ae^x+\ln x-1(a\in R)$.

（1）当 $a\leqslant e$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性：

（2）若函数 $f(x)$ 恰有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $x_1+x_2\leqslant 2\ln 3$，求 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值.

5. （2021•新乡三模）已知函数 $f(x)=\ln x$.

（1）求函数 $g(x)=x^2f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$\forall x_1$，$x_2\in[1,+\infty)$，$f(x_1x_2)\leqslant(x_1+x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})$.

6. （2021 春•海曙区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□ $a<\frac{5}{2}$ □□ $f(x)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □□ $\frac{f(x_2)}{x_1}+\frac{f(x_1)}{x_2}$ □□□□□□

7□□2021□•□□□□□□□ $f(x)=x-ae^x(a\in R)$ □ $x\in R$ □

□1□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □

□i□□ a □□□□□□

□ii□□□ $\frac{x_2}{x_1}$ □□ a □□□□□□□